Colle du 12 septembre: Polynômes et fractions rationnelles

1.1 Première série

Exercice 1: Soient P un polynôme à coefficients réels et (a,b) un point de $\mathbb{R}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que la courbe représentative de P soit symétrique par rapport au point (a,b).

Exercice 2: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé de degré n. Montrer que $(n-1)P'^2 \geq nPP''$.

Exercice 3: Trouver tous les polynômes P et Q dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que $(X^n-1)Q = P^2 - P$.

Exercice 4: Existe-t-il une suite de réels non nuls $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ est scindé sur $\mathbb{R}$?

1.2 Deuxième série

Exercice 1: *(Classique)* Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n)$.

Exercice 2: *(Classique)* Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ dont toutes les racines sont simples et non nulles. Notons-les $x_1, ..., x_n$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)}$. En déduire la valeur de $\sum_{i=1}^n \frac{1}{P'(x_i)}$.

Exercice 3: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré d, et pour $z_0 \in \mathbb{C}$, soit $n(z_0)$ le nombre de solutions deux à deux distinctes de l'équation $P(z) = z_0$. Calculer $\sum_{z\in\mathbb{C}}(d - n(z))$.

Exercice 4: Trouver tous les polynômes réels scindés sur $\mathbb{R}$ à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$.

1.3 Troisième série

Exercice 1: Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que l'équation $P(x) = 7$ a au moins 4 solutions entières deux à deux distinctes. Montrer qu'il n'existe pas d'entier x tel que $P(x) = 14$.

Exercice 2: *(Classique)* Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de racines $x_1, ..., x_n$ deux à deux distinctes mais pas nécessairement simples. Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de $x_1, ..., x_n$.

Exercice 3: Montrer que l'ensemble des solutions de l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{k}{x-k} \geq 1$$

est une réunion d'intervalles disjoints. Calculer la somme des longueurs de ces intervalles.

Exercice 4: Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ scindés. Montrer que $\sum_{k=0}^n a_k P^{(k)}$ est aussi scindé.